

Κεφάλαιο 3 - Τρίγωνα

Επισκόπηση της ύλης του κεφαλαίου

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται με τη μελέτη της ισότητας των τριγώνων και των εφαρμογών της στη μελέτη των ιδιοτήτων διαφόρων σχημάτων. Στο σχολικό βιβλίο αποδεικνύονται ως θεωρήματα ή πορίσματα οι εξής προτάσεις :

Τα τρία κριτήρια ισότητας των τριγώνων

- Αν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες είναι ίσες , τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- Αν μια πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μια πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία ίσες , τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου , τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

Τα τρία κριτήρια ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων

- Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία , τότε είναι ίσα.
- Αν σε δύο ορθογώνια τρίγωνα η μια κάθετη πλευρά και η προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία του ενός είναι αντίστοιχα ίσες με μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία του άλλου , τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα , όταν έχουν δύο οποιεσδήποτε πλευρές ίσες μία προς μία .
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα , όταν έχουν ίσες τις υποτείνουσες τους και μια οξεία γωνία ίση.

Ιδιότητες των ισοσκελών και ισοπλεύρων τριγώνων

- Αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές , τότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση γωνίες του είναι ίσες (και αντίστροφα).
- Οι γωνίες ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες (και αντίστροφα).
- Η διχοτόμος της γωνίας κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι επίσης ύψος και διάμεσος.
- Η διάμεσος της γωνίας κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι επίσης ύψος και διχοτόμος.

- Το ύψος της γωνίας κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι επίσης διάμεσος και διχοτόμος.

Χαρακτηριστικές ιδιότητες της μεσοκάθετης και της διχοτόμου

- Κάθε σημείο της μεσοκάθετης ενός ευθυγράμμου τμήματος απέχει εξίσου από τα άκρα του (και αντίστροφα).
- Κάθε σημείο της διχοτόμου απέχει εξίσου από τις πλευρές της και αντιστρόφως.

Ιδιότητες των τόξων, των χορδών, των αποστημάτων και των εφαπτόμενων ενός κύκλου.

- Σε ίσα τόξα ενός κύκλου ή ίσων κύκλων αντιστοιχούν ίσες χορδές (και αντίστροφα).
- Η κάθετη από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διέρχεται από το μέσο της χορδής και του αντίστοιχου τόξου.
- Το κέντρο ενός κύκλου απέχει εξίσου από ίσες χορδές και αντιστρόφως.
- Αν ευθεία ε εφάπτεται σε κύκλο (O, R) στο σημείο M , τότε η ακτίνα OM είναι κάθετη στην ϵ .
- Τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου είναι ίσα.
- Μια ευθεία δεν μπορεί να έχει περισσότερα από δύο κοινά σημεία με έναν κύκλο.

Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο

- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη καθεμιάς των απέναντι εσωτερικών γωνιών.
- Κάθε τρίγωνο μπορεί να έχει το πολύ μια αμβλεία ή ορθή γωνία.
- Σε κάθε τρίγωνο, απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία και αντιστρόφως.
- Η μεγαλύτερη πλευρά ενός αμβλυγωνίου τριγώνου είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από τη αμβλεία γωνία του.
- Η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι η υποτείνουσα.
- Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφορά τους.

Ιδιότητες των κάθετων και πλάγιων τμημάτων

- Από τυχαίο σημείο ευθείας μπορούμε να φέρουμε κάθετη προς την ευθεία. Η κάθετη αυτή είναι μοναδική.
- Από τυχαίο σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε κάθετη προς τη ευθεία. Η κάθετη αυτή είναι μοναδική.

- Το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα AM από σημείο A προς ευθεία ε είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα AB προς την ε.
- Τα ίχνη δύο ίσων πλάγιων τμημάτων ευθυγράμμων τμημάτων που άγονται από το ίδιο σημείο προς μια ευθεία ισαπέχουν από το ίχνος της κάθετης που άγεται από το ίδιο σημείο και αντιστρόφως.
- Τα ίχνη δύο άνισων πλάγιων ευθυγράμμων τμημάτων, που άγονται από το ίδιο σημείο προς μια ευθεία απέχουν ομοίως άνισα από το ίχνος της κάθετης που άγεται από το ίδιο σημείο.

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

- Δύο κύκλοι είναι δυνατόν να μην έχουν κοινά σημεία, να εφάπτονται ή να τέμνονται.
- Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.

Παρατηρήσεις – Υποδείξεις ασκήσεων

- Πριν αρχίσουμε να λύνουμε μια άσκηση είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πολύ καλά την εκφώνηση και να ξεχωρίζουμε τα δεδομένα από τα ζητούμενα.
- Το καλό σχήμα μας βοηθάει να «δούμε» την απόδειξη.
(!) Το σχήμα να είναι γενικό, δηλαδή να μην αναφέρεται σε ειδική περίπτωση.
Αν μας πουν π.χ. να σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο δεν πρέπει να φτιάξουμε ισοσκελές ή ισόπλευρο ή ορθογώνιο.
- Για να είναι δύο τρίγωνα ίσα, πρέπει να έχουν 3 κύρια στοιχεία ίσα.
Όλα τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων, περιέχουν μία τουλάχιστον ισότητα μεταξύ των πλευρών του, δηλαδή για να έχουμε ισότητα δύο τριγώνων, πρέπει οπωσδήποτε να υπάρχει η ισότητα μιας τουλάχιστον πλευράς του ενός με μια πλευρά του άλλου.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες ΔΕΝ είναι ίσα.

- Αν σε δύο τρίγωνα η μια πλευρά, η απέναντι της γωνία και μια προσκείμενη σε αυτήν γωνία του ενός είναι αντίστοιχα ίσες με μια πλευρά, την απέναντι της γωνία και μια προσκείμενη σε αυτήν γωνία του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως 4^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.
- Πολλές φορές ένα γεωμετρικό πρόβλημα λύνεται σύντομα, αν φέρουμε μια κατάλληλη (βοηθητική) ευθεία. Σαν τέτοιες αναφέρουμε :
 - α) προέκταση διαμέσου κατά ίσο τμήμα
 - β) αν δίνεται η διχοτόμος μιας γωνίας και ευθεία κάθετη σε αυτήν, τότε προεκτείνουμε την ευθεία μέχρι να «κόψει» τις πλευρές της γωνίας.
Το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ισοσκελές.
- Όταν έχω να λύσω ένα πρόβλημα γεωμετρικού τόπου τότε :
 - α) Εντοπίζουμε το είδος του γ.τ. δηλαδή αν είναι ευθεία ή περιφέρεια.
 - β) Αποδεικνύουμε ότι κάθε σημείο του γ.τ. ανήκει στην γραμμή που εντοπίσαμε.
 - γ) Αποδεικνύουμε το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε σημείο της γραμμής που προσδιορίσαμε έχει την ιδιότητα του γ.τ.
 - δ) Κάνουμε διερεύνηση. Εξετάζουμε αν υπάρχουν σημεία της γραμμής, τα οποία δεν ανήκουν στο γ.τ.
- Για να συγκριθούν ανισοτικά δύο τρίγωνα πρέπει να έχουν απαραίτητα δύο πλευρές ίσες. Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη πρόταση :
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.
- Είμαστε βέβαιοι ότι λύσαμε σωστά την άσκηση, αν κάθε σχέση που χρησιμοποιήσαμε ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις :
 - ❖ Βγαίνει από τα δεδομένα
 - ❖ Είναι εφαρμογή γνωστού Θεωρήματος
 - ❖ Την κατοχυρώνει ένα αξίωμα
 - ❖ Είναι αντικείμενο ενός ορισμού
 - ❖ Βγαίνει από την κατασκευή ενός στοιχείου του σχήματος
 - ❖ Οι σχέσεις που χρησιμοποιούμε και οι πράξεις που κάνουμε με γεωμετρικά μεγέθη ικανοποιούν τις ιδιότητες των σχέσεων και πράξεων των αλγεβρικών μεγεθών.

1. Ναδειχθεί ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου απέχουν το ίδιο από τη βάση του.

Λύση

Από τα Δ και Ε φέρνουμε τις κάθετες ΔΖ και ΕΗ πάνω στην βάση του ΒΓ.

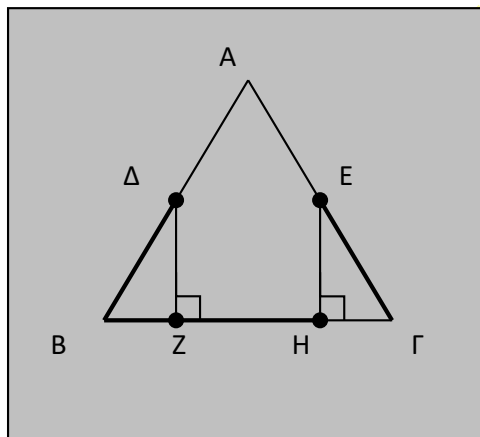
Θα δείξουμε ότι : $DZ=EH$.

Τα σχηματισθέντα ορθογώνια τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ είναι ίσα, διότι :

α) έχουν τις υποτείνουσες ΔΒ και ΕΓ ίσες , ως μισα ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ

β) τις οξείες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{G}$ ίσες, ως παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου

γ) είναι ορθογώνια $\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$. Άρα ισχύει ότι : $DZ=EH$.



2. Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους με άνισες ακτίνες και ευθεία ε που τέμνει αυτούς τους κύκλους κατά σειρά στα σημεία Α, Β, Γ, Δ .Να δειχθεί ότι :
 $AB=ΓΔ$ και $ΑΓ=ΒΔ$.

Λύση

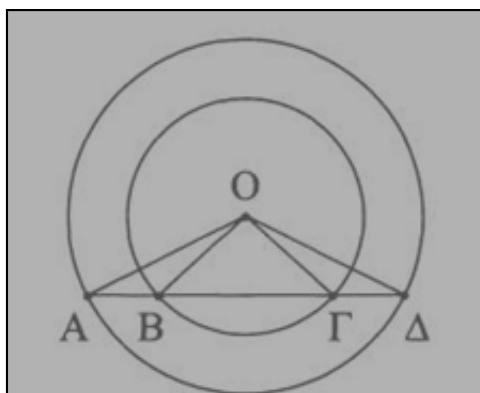
Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν :

α) $OB=OG=R$

β) $OA=OD=ρ$

$$\angle AOB = \angle BOG - \angle AOG$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad &= \angle GOB - \angle AOG \\ &= \angle GOD \end{aligned}$$



Άρα είναι ίσα και ισχύει : $AB=ΓΔ$ και $ΑΓ=ΒΔ$.

3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές του BA και ΓA προς το μέρος του A και στις προεκτάσεις αυτές παίρνουμε αντιστοίχως τμήματα $AB=AB'$ και $A\Gamma=A\Gamma'$.
Να δείξετε ότι η προέκταση της διαμέσου AM διέρχεται από το μέσο της $B'\Gamma'$.

Λύση

Για να δείξουμε ότι προέκταση της διαμέσου AM διέρχεται από το μέσο της $B'\Gamma'$, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η σχέση : $B'M'=M'\Gamma'$, αν θεωρήσουμε M' το μέσο της $B'\Gamma'$.

Ισχύει ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB'\Gamma'$ είναι ίσα διότι :

α) $AB=AB'$

β) $A\Gamma=A'\Gamma'$

γ) $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}'\hat{A}\hat{\Gamma}'$, (ως κατακορυφήν γωνίες)

Δηλαδή εφαρμόζεται το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ.

Ας συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και $AM'\Gamma'$.

Ισχύουν :

α) $A\Gamma=A\Gamma'$

β) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, (ως κατακορυφήν γωνίες)

γ) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$, από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$

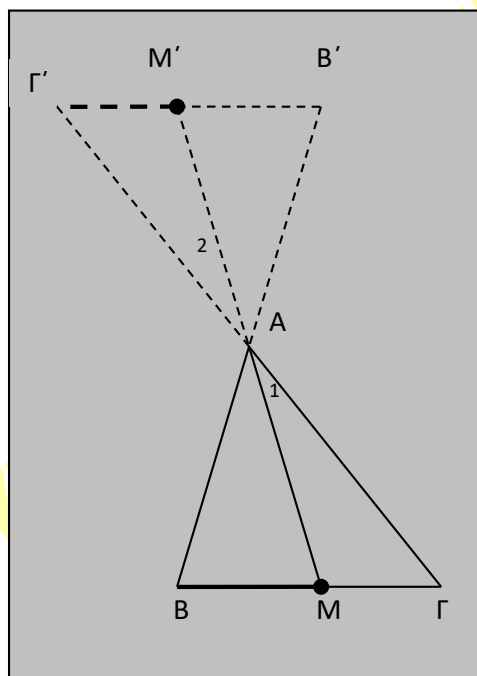
και $AB'\Gamma'$

Δηλαδή εφαρμόζεται το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΓΠΓ.

Άρα τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και $AM'\Gamma'$ είναι ίσα και θα ισχύει ότι : $M\Gamma=M'\Gamma'$.

Επίσης, από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $AB'\Gamma'$ ισχύει ότι : $B\Gamma=B'\Gamma'$.

$$\text{Άρα : } M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Rightarrow M\Gamma = \frac{B'\Gamma'}{2} \Rightarrow M'\Gamma' = \frac{B'\Gamma'}{2} \Rightarrow M' \text{ είναι το μέσο της } B'\Gamma'.$$



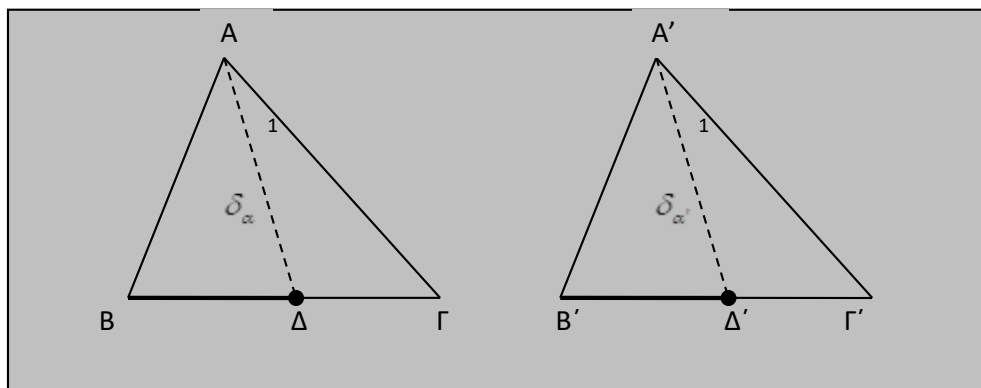
4. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$.

Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση

Για να είναι ίσα δύο τρίγωνα, πρέπει να έχουν ίσα 3 κύρια στοιχεία. Οι διχοτόμοι του τριγώνου ανήκουν στα δευτερεύοντα στοιχεία.

Σκοπός μας λοιπόν θα είναι να βρούμε ακόμη ένα στοιχείο ίδιο αφού έχουμε τα $\beta = \beta'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$.



Ας πάρουμε τα τρίγωνα ΑΔΓ και Α'Δ'Γ'. Αυτά είναι ίσα διότι :

α) ΑΓ=Α'Γ' (από υπόθεση)

β) ΑΔ=Α'Δ' (από υπόθεση)

γ) $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$ (ως μισά ίσων γωνιών)

Δηλαδή εφαρμόζεται το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ.

Άρα θα ισχύει και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Δηλαδή τα αρχικά μας τρίγωνα έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$, $\beta = \beta'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Δηλαδή εφαρμόζεται το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΓΠΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ'Γ' είναι ίσα.

**5. Δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\alpha = \alpha'$, $\nu_\beta = \nu_{\beta'}$, $\nu_\gamma = \nu_{\gamma'}$.
Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.**

Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΓ και Β'Δ'Γ' :

α) ΒΓ=Β'Γ' (από υπόθεση)

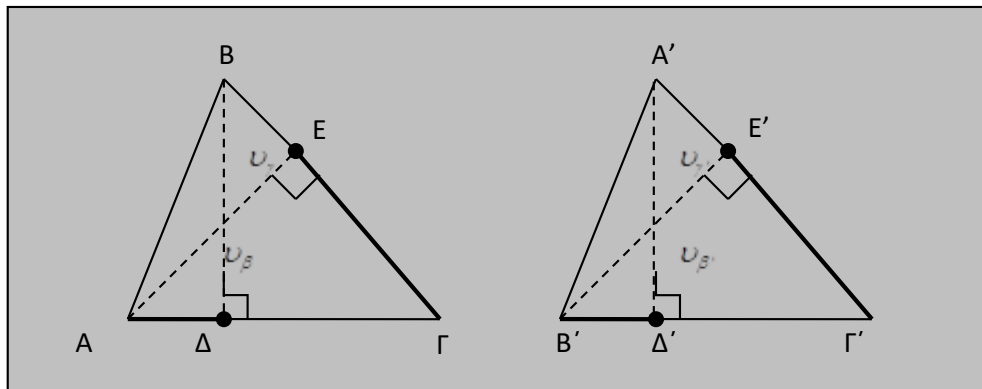
β) $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}' = 90^\circ$

γ) $BD = B'D'$ (από υπόθεση)

Άρα τα παραπάνω τρίγωνα είναι ίσα και ισχύει ότι : $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

Όμοια, αν συγκρίνουμε τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $B'E'\Gamma'$ θα προκύψει $\hat{B} = \hat{B}'$.

Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες γωνίες ίσες, συνεπώς είναι ίσα.



6. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από δύο δοθέντα σημεία A και B.

Λύση

Αν K είναι το κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A και B, τότε $KA = KB$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου. Άρα το K πρέπει να βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο του δοθέντος ευθύγραμμου τμήματος AB.

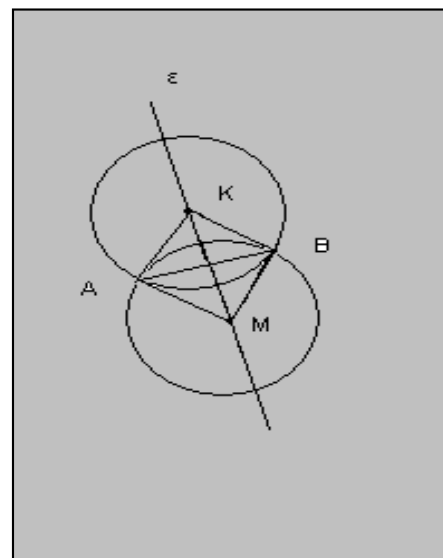
Αντίστροφα:

Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο M του ευρεθέντος γ.τ., τότε θα ισχύει :

$MA = MB$, κάτι που σημαίνει ότι το M είναι

κέντρο κύκλου που περνά από τα σημεία A και B.

Έτσι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος AB.



7. Να κατασκευαστεί το συμμετρικό ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την κορυφή A και ναδειχτεί ότι είναι τρίγωνο ίσο με το $AB\Gamma$.

Λύση

Στην περίπτωση αυτή έχουμε συμμετρία ως προς κέντρο (σημείο A).

B' συμμετρικό του B ως προς το σημείο A .

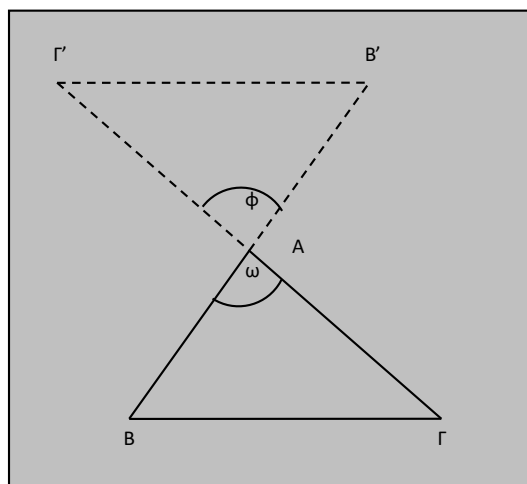
Γ' συμμετρικό του Γ ως προς το σημείο A .

Ισχύει ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα διότι :

α) $AB=A'B'$ (B' συμμετρικό του B ως προς το σημείο A)

β) $A\Gamma=A'\Gamma'$ (Γ' συμμετρικό του Γ ως προς το σημείο A)

γ) $\hat{\omega} = \hat{\phi}$ (ως κατακορυφήν γωνίες)



8. Δύο πλευρές τριγώνου είναι 16μ και 9μ. Μεταξύ ποιων τιμών μπορεί να μεταβάλλεται το μήκος της τρίτης πλευράς του ;

Λύση

Ισχύει : $|\beta - \gamma| < \alpha < |\beta + \gamma|$. Άρα έχουμε :

$$16-9 < x < 16+9$$

$$7 < x < 25.$$

9. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει : $\nu_{\alpha} + \nu_{\beta} + \nu_{\gamma} < 2\tau$, όπου 2τ η περίμετρος του τριγώνου.

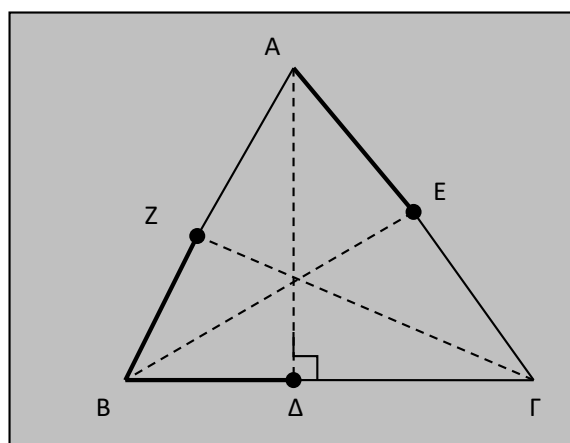
Λύση

Παρατηρούμε ότι $A\Delta$, BE , ΓZ , αφού είναι ύψη του τριγώνου ,

θα ισχύει :

$$A\Delta \leq A\Gamma, BE \leq AB, \Gamma Z \leq B\Gamma.$$

(Το ίσο θα ισχύει το πολύ σε μια από



αυτές τις περιπτώσεις).

Άρα έχουμε : $AD + BE + \Gamma Z < AG + AB + B\Gamma$

Δηλαδή , $\nu_\alpha + \nu_\beta + \nu_\gamma < 2\tau$.

10. Αν M σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου ABΓ, τότε ισχύει :

$$MB + M\Gamma < AB + A\Gamma \quad , \quad \hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma} > \hat{A}.$$

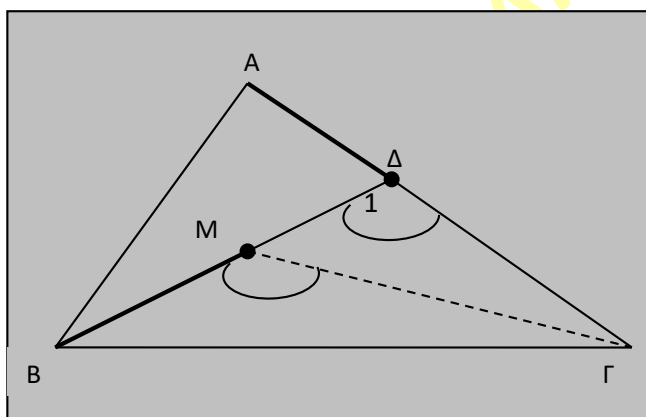
Λύση

Αφού η MB είναι στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{B}$, θα τέμνει την πλευρά AΓ, έστω στο σημείο Δ.

Από τα τρίγωνα ABΔ και MΓΔ παίρνουμε :

$$BM + M\Delta < AB + A\Delta \quad (1) \quad \text{και}$$

$$M\Gamma < M\Delta + \Delta\Gamma \quad (2).$$



Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε :

$$MB + M\Gamma < AB + A\Delta + \Delta\Gamma$$

$$MB + M\Gamma < AB + A\Gamma$$

Επίσης ισχύει ότι : $\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma} > \hat{\Delta}_1 > \hat{A}$, εφαρμόζοντας το θεώρημα που αναφέρεται στην εξωτερική γωνία τριγώνου, διαδοχικά στα τρίγωνα MΓΔ και ABΔ.

11. Ναδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ABΓ ($AB < A\Gamma$) ισχύει :

$$\nu_\alpha \leq \delta_\alpha \leq \mu_\alpha.$$

Λύση

Ισχύει ότι η κάθετη είναι μικρότερη από κάθε πλάγια, άρα $\nu_\alpha \leq \delta_\alpha$ και $\nu_\alpha \leq \mu_\alpha$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\delta_\alpha \leq \mu_\alpha$, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι : $B\hat{A}\Delta < B\hat{A}M$.

Όμως $\hat{B} + B\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} + \Gamma\hat{A}\Delta$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, άρα θα είναι :

$$\hat{B}\hat{A}\Delta < \hat{\Gamma}\hat{A}\Delta$$

$$2\hat{B}\hat{A}\Delta < \hat{\Gamma}\hat{A}\Delta + \hat{B}\hat{A}\Delta$$

$$2\hat{B}\hat{A}\Delta < 2\hat{B}\hat{A}E$$

$$\hat{B}\hat{A}\Delta < \hat{B}\hat{A}E \quad (1)$$

Προεκτείνουμε την διάμεσο AM κατά τμήμα AM=MZ.

Τα τρίγωνα BAM και MZΓ θα είναι ίσα, δηλαδή θα ισχύει :

$$\hat{B}\hat{A}M = \hat{A}\hat{Z}\Gamma \text{ και } AB = \Gamma Z.$$

Επίσης αφού ισχύει ότι $AB < A\Gamma$ θα είναι $\Gamma Z < A\Gamma$, άρα :

$$\hat{\Gamma}\hat{A}Z < \hat{A}\hat{Z}\Gamma$$

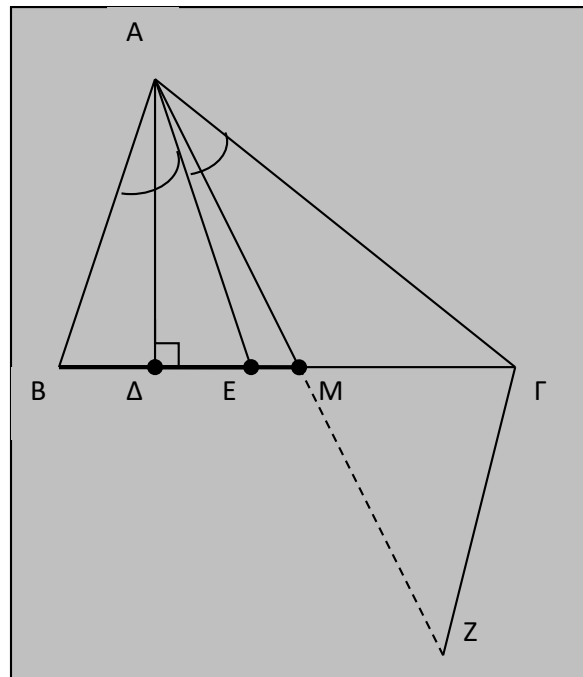
$$\hat{A}\hat{Z}\Gamma + \hat{\Gamma}\hat{A}Z < 2\hat{A}\hat{\Gamma}Z$$

$$2\hat{B}\hat{A}E < 2\hat{A}\hat{\Gamma}Z$$

$$\hat{B}\hat{A}E < \hat{A}\hat{Z}\Gamma \quad (2)$$

$$\hat{B}\hat{A}E < \hat{B}\hat{A}M$$

Από τις σχέσεις (1), (2) βάση της μεταβατικής ιδιότητας ισχύει : $\hat{B}\hat{A}\Delta < \hat{B}\hat{A}M$.



12. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ να δείξετε ότι ισχύει :

α) $\beta + \gamma > 2\mu_\alpha$

β) $\alpha + \beta + \gamma > \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$.

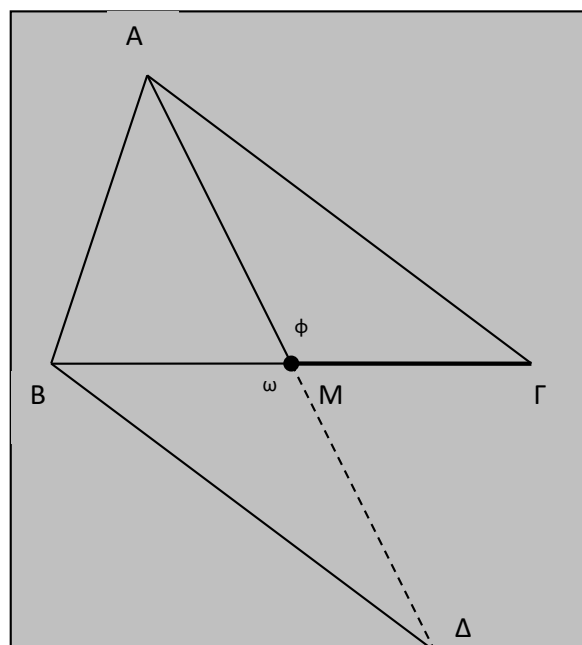
Λύση

α) Προεκτείνουμε την διάμεσο AM κατά τμήμα MD=AM.

Τότε τα τρίγωνα AMΓ και BMD είναι ίσα γιατί έχουν :

α) BM=MG (M μέσο της BG)

β) AM=MD (από κατασκευή)



γ) $\hat{\omega} = \hat{\phi}$ (ως κατακορυφήν γωνίες).

Επομένως , $ΑΓ=ΒΔ=β$

Από το τρίγωνο $ΑΒΔ$ προκύπτει :

$$ΑΒ + ΒΔ > ΑΔ$$

$$β + γ > 2ΑΜ$$

$$β + γ > 2μ_α$$

β) Έχουμε διαδοχικά :

$$β + γ > 2μ_α, γ + α > 2μ_β, α + β > 2μ_γ$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισοτήτων έχουμε ότι :

$$2β + 2γ + 2α > 2μ_α + 2μ_β + 2μ_γ$$

$$α + β + γ > μ_α + μ_β + μ_γ$$

13. Έστω M ένα εξωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) και A, B τα σημεία τομής της ευθείας OM με τον κύκλο. Αν P τυχαίο σημείο του κύκλου, ναδειχθεί :

$$MA \leq MP \leq MB.$$

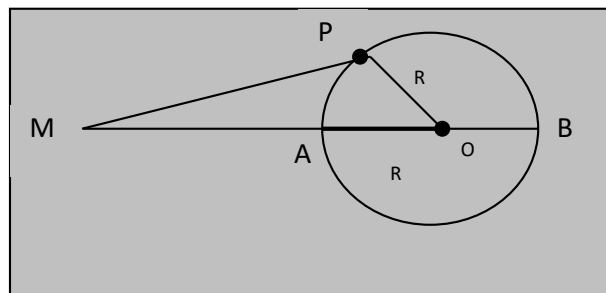
Λύση

- Αν $A \equiv P$ τότε $MA=MP < MB$.
- Αν $B \equiv P$ τότε $MA < MP=MB$.
- Έστω ότι το P είναι διαφορετικό από τα σημεία A και B .
Τότε από το τρίγωνο OMP έχουμε

$$MO - OP < MP < MO + OP$$

$$MO - R < MP < MO + R$$

$$MA < MP < MB$$



A. Ερωτήσεις θεωρίας

1. Πως ταξινομούνται τα τρίγωνα ανάλογα με τις σχέσεις μεταξύ των πλευρών τους ;
2. Πως ταξινομούνται τα τρίγωνα ανάλογα με το είδος των γωνιών τους ;
3. Ποια είναι τα κύρια και ποια τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου ;
4. Τι ονομάζεται διάμεσος, τι διχοτόμος και τι ύψος ενός τριγώνου ;
5. Τι ονομάζεται προβολή ενός σημείου πάνω σε ευθεία ;
6. Τι ονομάζουμε γεωμετρικό τόπο ;
7. Ποιοι είναι οι βασικοί γεωμετρικοί τόποι ;
8. Πότε ένα γεωμετρικό σχήμα ονομάζεται συμμετρικό ως προς ένα σημείο O ; Τι είναι το κέντρο συμμετρίας ;
9. Τι είναι η αξονική συμμετρία ;
10. Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου ;
11. Πότε μια ευθεία λέγεται εφαπτομένη ενός κύκλου ;
12. Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων ;
13. Τι ονομάζεται διάκεντρος δύο κύκλων ;
14. Μπορεί η διάκεντρος να «δηλώσει» την θέση δύο κύκλων ;

B. Ερωτήσεις του τύπου <<Σωστό – Λάθος>>

15. Το τρίγωνο είναι μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή.
16. Στο ισοσκελές τρίγωνο μία από τις ίσες γωνίες του μπορεί να είναι αμβλεία.
17. Αν μια διάμεσος ενός τριγώνου είναι και διχοτόμος του, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
18. Όλες οι γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
19. Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διχοτόμος του.
20. Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε ύψος είναι και διάμεσος του.
21. Δύο ισοσκελή τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα.
22. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα.
23. Κάθε γωνία τριγώνου έχει και την εξωτερική της.
24. Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους μια προς μια ίσες είναι πάντα ίσα.
25. Δύο τρίγωνα, στα οποία η μια πλευρά και δύο γωνίες του ενός είναι αντίστοιχα ίσες με μια πλευρά και δυο γωνίες του άλλου, είναι πάντα ίσα.
26. Δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές του ίσες μία προς μία είναι ίσα.
27. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, αν οι δύο οξείες γωνίες τους είναι μία προς μία ίσες.
28. Δύο ορθογώνια που έχουν ίσες υποτείνουσες είναι ίσα μεταξύ τους.
29. Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε μία από τις ίσες πλευρές του είναι μεγαλύτερη από το μισό της βάσης του.
30. $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma' \Leftrightarrow \beta = \beta', \gamma = \gamma', \mu_{\beta} = \mu_{\beta'}$
31. $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma' \text{ (οξυγώνια)} \Leftrightarrow \alpha = \alpha', \upsilon_{\beta} = \upsilon_{\beta'}, \upsilon_{\gamma} = \upsilon_{\gamma'}$
32. $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma' \text{ (οξυγώνια)} \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{A}', \upsilon_{\beta} = \upsilon_{\beta'}, \upsilon_{\gamma} = \upsilon_{\gamma'}$
33. $\triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma' \Leftrightarrow \beta = \beta', \hat{A} = \hat{A}', \delta_{\alpha} = \delta_{\alpha'}$
34. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

35. Οι μεσοκάθετες σε ένα τρίγωνο δεν συντρέχουν σε ένα σημείο.
36. Η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ίσα τρίγωνα.
37. Σε ίσες χορδές δύο κύκλων αντιστοιχούν ίσα τόξα.
38. Μια γωνία έχει άξονα συμμετρίας την διχοτόμο της.
39. Μια ευθεία έχει άξονα συμμετρίας.
40. Μια ευθεία έχει άπειρα κέντρα συμμετρίας.
41. Αν $\beta = \beta', \gamma = \gamma', \hat{A} > \hat{A}'$ τότε $\alpha > \alpha'$.
42. Αν $\beta = \beta', \gamma = \gamma', \alpha > \alpha'$ τότε $\hat{A} > \hat{A}'$.
43. Αν $\gamma > \beta$ και $\hat{A} > 90^\circ$, τότε $\alpha > \gamma > \beta$.
44. Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου και $\alpha > \beta, \beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$.
45. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma < \beta + \delta$.
46. Αν $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$, τότε $\alpha > \beta$.
47. Στα ισόπλευρα τρίγωνα ισχύει $\delta_\alpha < \upsilon_\alpha < \mu_\alpha$.
48. Στα ισοσκελή τρίγωνα ABΓ με $(AB=AG)$ ισχύει $\upsilon_\alpha < \delta_\alpha < \mu_\alpha$.
49. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < 2\tau$.
50. Η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι η μεγαλύτερη κάθετη πλευρά του.
51. Η ημiperίμετρος ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε πλευρά του.
52. Υπάρχει τρίγωνο ABΓ με $\alpha = \frac{\gamma}{3}$ και $\beta = \frac{3\gamma}{5}$.
53. Υπάρχει τρίγωνο ABΓ με $\alpha = \frac{7\gamma}{5}$ και $\beta = \frac{\gamma}{3}$.
54. Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση από μια διάμετρο.
55. Αν AB, AG η κάθετη και η πλάγια από το σημείο A προς την ευθεία ϵ , τότε ισχύει $AB > AG$.
56. Τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος, ισαπέχουν από τα άκρα του.
57. Κάθε ευθεία κάθετη στο άκρο ακτίνας κύκλου είναι εφαπτομένη του.
58. Τα εφαπτόμενα τμήματα προς κύκλο από σημείο εκτός αυτού μπορεί να είναι άνισα.
59. Αν δύο χορδές κύκλου έχουν κοινό μέσο τότε είναι διάμετροι του.
60. Το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων ανήκει στη διάκεντρό τους.
61. Αν η διάκεντρος δύο κύκλων είναι μικρότερη της μεγαλύτερης ακτίνας,

οι κύκλοι δεν τέμνονται.

62. Για να συγκρίνουμε δύο τόξα, πρέπει αναγκαστικά να ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

63. Σε δύο ίσους και εφαπτόμενους εξωτερικά ίσους κύκλους υπάρχει κοινή εφαπτομένη παράλληλη στη διάκεντρο.

64. Υπάρχει κύκλος που να περνά από ένα εσωτερικό και από ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου και να μην τέμνει αυτόν τον κύκλο.

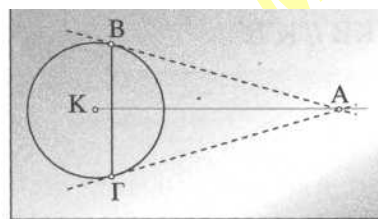
65. Αν α είναι η απόσταση ευθείας ϵ από το κέντρο του κύκλου (O, ρ) , τότε :

- Αν $\alpha > \rho$, η ϵ λέγεται εξωτερική του κύκλου
- Αν $\alpha = \rho$, η ϵ λέγεται τέμνουσα του κύκλου
- Αν $\alpha < \rho$, η ϵ λέγεται εφαπτομένη του κύκλου

66.

Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας

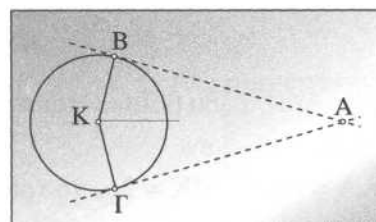
των εφαπτόμενων ΑΒ και ΑΓ.



67.

Η διχοτόμος της γωνίας ΒΚΓ

διέρχεται από το σημείο Α.



68. Δύο κύκλοι έχουν διαφορά ακτινών 2. Αν η διάκεντρος είναι 1, τότε οι κύκλοι τέμνονται.

69. Οι εφαπτόμενες στα άκρα των κάθετων διαμέτρων ενός κύκλου, σχηματίζουν τετράγωνο.

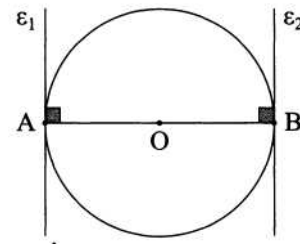
70. Οι κύκλοι $(O, 3)$ και $(K, 2)$ με $OK=4$ δεν εφάπτονται ούτε τέμνονται.

71. Κύκλοι που τέμνονται έχουν διάκεντρο $\delta=3$. Τότε θα ισχύει ότι :
 $3-\rho < R < 3+\rho$.

72.

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν τα εξής:

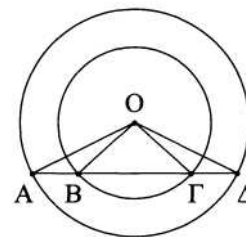
1. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.
2. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.
3. $\varepsilon_1 \perp AB$.



73. Η διάκεντρος είναι πάντα κάθετη στην κοινή χορδή.

74. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν τα εξής:

1. $AB = \Gamma\Delta$.
2. $OA = OB$.
3. $OA > OB$.
4. $OB > B\Gamma$ πάντα.
5. $A\Delta = 2B\Gamma$.
6. $\triangle OAB = \triangle O\Gamma\Delta$



Το τρίγωνο $\triangle O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές

75. Στο ορθογώνιο τρίγωνο, πόσες ορθές γωνίες έχουμε;
Α. μία ορθή Β. δύο ορθές Γ. καμία ορθή Δ. τρεις ορθές.
76. Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο, πόσες αμβλείες και πόσες οξείες γωνίες έχουμε;
Α. 2 αμβλείες, 1 οξεία Β. 1 αμβλεία, 2 οξείες
Γ. 3 αμβλείες, καμία οξεία Δ. καμία αμβλεία, 3 οξείες.
77. Το τρίγωνο που έχει μόνο δύο οξείες γωνίες :
Α. Λέγεται οξυγώνιο Β. Δεν είναι οξυγώνιο
Γ. Είναι ορθογώνιο Δ. Δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο
78. Στο σκαληνό και οξυγώνιο τρίγωνο, πόσες οξείες γωνίες έχουμε;
Α. 3 Β. 1 Γ. 2 Δ. καμία.
79. Αν οι α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ και ισχύει η σχέση $\alpha - \beta < \gamma < \alpha + \beta$, τότε ποια διάταξη είναι η σωστή;
Α. $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ Β. $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ Γ. $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ Δ. $\beta < \alpha < \gamma$
80. Αν μια ευθεία ϵ είναι μεσοκάθετη του τμήματος AB , τότε για το σημείο Λ που ανήκει στο ημιεπίπεδο (ϵ, A) ισχύει:
Α. $\Lambda A = \Lambda B$ Β. $\Lambda A > \Lambda B$ Γ. $\Lambda A < \Lambda B$ Δ. Κανένα απ' αυτά.
81. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του. Αν Π_1 και Π_2 είναι η περίμετρος των τριγώνων $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle \Delta B\Gamma$ αντίστοιχα, τότε ισχύει :
Α. $\Pi_1 = \Pi_2$ Β. $\Pi_1 > \Pi_2$ Γ. $\Pi_1 < \Pi_2$ Δ. Κανένα απ' αυτά.
82. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Αν $A\Delta$ είναι η διάμεσος του τριγώνου, τότε ποια σχέση συνδέει τα $AB, A\Gamma, A\Delta$;
Α. $\frac{A\Gamma - AB}{2} < A\Delta < \frac{A\Gamma + AB}{2}$ Β. $\frac{AB - A\Gamma}{2} < A\Delta < \frac{A\Gamma + AB}{2}$
Γ. $A\Gamma - A\Delta < A\Delta < A\Gamma + A\Delta$.
83. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και τρία σημεία K, Λ, M στο εσωτερικό του. Αν Π_1 και Π_2 είναι η περίμετρος των τριγώνων $\triangle K\Lambda M$ και $\triangle AB\Gamma$ αντίστοιχα, τότε ισχύει :
Α. $\Pi_1 > \Pi_2$ Β. $\Pi_1 = \Pi_2$ Γ. $\Pi_1 < \Pi_2$

84. Το απόστημα μιας χορδής είναι :
- A. Μικρότερο από την χορδή B. Ίσο με την χορδή
- Γ. Κάθετο στην χορδή Δ. Έχει μήκος το μισό της χορδής
85. Θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ μιας χορδής AB στον κύκλο (O,ρ), για τα οποία ισχύει $AG = GD = DB$. Να εξετάσετε ποιο από τα παρακάτω ισχύει :
- A. $\widehat{OAG} < \widehat{ODA}$ B. $\widehat{OAG} > \widehat{ODA}$ Γ. $\widehat{OAG} = \widehat{ODA}$.
86. Δίνεται κύκλος (O,ρ) και τέμνουσα ευθεία ε. Αν $OA = \alpha$ είναι η κάθετη στην ευθεία ε, τότε ισχύει :
- A. $\alpha = \rho$ B. $\alpha > \rho$ Γ. $\alpha < \rho$ Δ. Τίποτα από αυτά.
87. Δύο κύκλοι με 3 κοινά σημεία :
- A. Τέμνονται B. Εφάπτονται Γ. Ταυτίζονται Δ. Τίποτα απ' αυτά
88. Η γωνία $\hat{A}$ που σχηματίζουν δύο εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το A, μπορεί να είναι ορθή:
- A. ναι B. όχι Γ. όχι πάντοτε Δ. ναι πάντοτε.
89. Αν Κ εσωτερικό σημείο και Λ εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,ρ), τότε ισχύει :
- A. $OK = OL$ B. $OK > OL$ Γ. $OK < OL$ Δ. $OK < OL$.
90. Τρεις ίσοι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. Το τρίγωνο που έχει κορυφές τα κέντρα των κύκλων και πλευρές τις διακέντρους τους, είναι:
- A. ορθογώνιο B. ισοσκελές Γ. αμβλυγώνιο
- Δ. ισόπλευρο E. κανένα από αυτά.
91. Κύκλοι (O,3) και (K,2) εφάπτονται εσωτερικά αν :
- A. $\delta = 1$ B. $\delta \geq 1$ Γ. $\delta \leq 1$ Δ. Τίποτα απ' αυτά
92. Δύο κύκλοι (O,ρ) και (Λ,2ρ) εφάπτονται εξωτερικά. Για τη διάκεντρο δ ισχύουν :
- A. $\delta = 3\rho$ B. $\delta > 3\rho$ Γ. $\delta < 3\rho$
- Δ. $\delta \leq 3\rho$ E. $\delta \geq 3\rho$.
93. Δυο κύκλοι (O,ρ) και (K,2ρ) έχουν διάκεντρο $\delta = 4\rho$. Ποια είναι η σχετική τους θέση;
- A. τέμνονται εσωτερικά B. τέμνονται εξωτερικά

Γ. εφάπτονται

Δ. δεν τέμνονται.

94. Δυο κύκλοι (O, ρ) και $(K, 3\rho)$ έχουν διάκεντρο $\delta = \sqrt{2\rho}$.

Ποια η σχετική τους θέση;

A. εφάπτονται εσωτερικά

B. τέμνονται

Γ. εφάπτονται εξωτερικά

Δ. βρίσκεται ο (O, ρ) εσωτερικά

E. τίποτε από αυτά

του $(K, 3\rho)$

95. Δυο κύκλοι (O, ρ) και $(K, 3\rho)$ έχουν διάκεντρο $\delta = \rho$.

Ποια είναι η σχετική τους θέση;

A. ο ένας περνάει από το κέντρο του άλλου

B. εφάπτονται εσωτερικά

Γ. εφάπτονται εξωτερικά

Δ. τέμνονται

E. τίποτε από αυτά.

Δ. Ερωτήσεις συμπλήρωσης – αντιστοίχισης

- 96.. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του είναι.....
και
- 97.. Ένα τρίγωνο με τρεις πλευρέςείναι σκαληνό, με τρεις πλευρές
είναι ισόπλευρο ενώ με δύο πλευρές ίσες λέγεται
- 98.. Περίμετρος ενός τριγώνου λέγεται το.....πλευρών ενός
τριγώνου και συμβολίζεται με.....
Το μισό της περιμέτρου λέγεταικαι συμβολίζεται με
- 99... Τα σημεία της.....μιας γωνίας είναι τα μόνα σημεία της
γωνίας που ισαπέχουν από τις πλευρές της.
100. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο αν μια γωνία του είναι.....
τότε αυτό είναι και ισοσκελές.
- 101.. Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες.....με τις πλευρές
ενός άλλου τριγώνου, τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.
- 102.. Η κάθετη από το.....ενός κύκλου προς μια χορδή του
διέρχεται από το.....της χορδής και του αντίστοιχου τόξου.
103. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται.....γωνίες.
104. Η τριγωνική ανισότητα για τα σημεία Α, Β, Γ εκφράζεται από την σχέση
.....όπου το (=) ισχύει όταν τα σημεία είναι.....ενώ
το.....όταν δεν είναι συνευθειακά.
- 105.. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και τις.....
γωνίες....., τότε έχουν τις τρίτες πλευρές ομοίως άνισες.
106. Αν τα ίχνη δύο πλαγίων απέχουν άνισα από το ίχνος της.....
τότε είναι.....
107. Γεωμετρικός τόπος σημείων, τα οποία έχουν....., λέγεται
κάθε σχήμα, του οποίου.....έχουν την ιδιότητα αυτή.
- 108.. Αν οι εφαπτόμενες ενός κύκλου στα σημεία Α και Β αυτού είναι
παράλληλες τότε το τόξο $\widehat{AB}$ είναι
109. Αν α η απόσταση του κέντρου ενός κύκλου από την ευθεία ε, τότε :
• Αν $\alpha > \rho$, η ευθεία και ο κύκλος.....

- Αν $\alpha \dots \rho$, η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο.
 - Αν $\alpha < \rho$, η ευθεία και ο κύκλος.....
110. Η ευθεία που δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο λέγεται....., ενώ όταν έχει ένα κοινό σημείο..... Η εφαπτόμενη κύκλου είναι..... στην ακτίνα που καταλήγει στο.....
111. Από ένα σημείο εκτός κύκλου προς τον κύκλο φέρνουμε..... εφαπτόμενες ευθείες. Η ευθεία που ενώνει το σημείο και το κέντρο του κύκλου λέγεται..... Τα εφαπτόμενα αυτά τμήματα είναι μεταξύ τους.
112. Οι εφαπτόμενες σε αντιδιαμετρικά σημεία ενός κύκλου είναι μεταξύ τους
113. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα..... λέγεται διάκεντρος.
114. Αν η διάκεντρος $\delta = R + \rho$, όπου R και ρ οι ακτίνες των δυο κύκλων, τότε οι κύκλοι.....
115. Δύο κύκλοι που έχουν..... λέγονται εφαπτόμενοι κύκλοι. Το σημείο που οι κύκλοι εφάπτονται λέγεται σημείο.....
116. Οι κύκλοι που έχουν δύο κοινά σημεία λέγονται..... Τα κοινά σημεία τα ενώνει μια χορδή που λέγεται.....
117. Αν η διάκεντρος $\delta > R + \rho$, τότε οι κύκλοι.....
118. Αν η διάκεντρος $\delta < R + \rho$, τότε οι κύκλοι.....
119. . Αν η διάκεντρος $R - \rho < \delta$, τότε οι κύκλοι.....
120. Αν η διάκεντρος $\delta = R - \rho$, τότε οι κύκλοι.....
121. . Δυο κύκλοι ίσοι δεν μπορούν να..... εσωτερικά.
122. . Ο φορέας της διακέντρου δύο κύκλων που τέμνονται, είναι μεσοκάθετος στην.....
123. . Το σημείο επαφής δύο κύκλων είναι σημείο της.....

124..

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $d = R_1 + R_2$	Α. Τέμνονται
2. $d < R_1 - R_2$	Β. Εφάπτονται εσωτερικά
3. $d = R_1 - R_2$	Γ. Εφάπτονται εξωτερικά
4. $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	Δ. Ο ένας εκτός του άλλου
5. $d > R_1 + R_2$	Ε. Ο ένας εντός του άλλου

125.

Μήκος διακέντρου δ	Μήκος ακτίνας R	Μήκος ακτίνας ρ	Αριθμός κοινών σημείων	Σχήμα
7	3	2		
5	4	3		
6	2	4		
4	8	2		
7	10	3		

126.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\alpha = \rho$	Α. Η ευθεία και ο κύκλος Δεν έχουν κοινά σημεία. Β. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
2. $\alpha > \rho$	Γ. Η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία. Δ. Η ευθεία και ο κύκλος έχουν άπειρα κοινά σημεία.
3. $\alpha < \rho$	Ε. Η ευθεία και ο κύκλος έχουν Τουλάχιστον δύο κοινά σημεία.

127.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\delta = R + \rho$	Α. Κάθε ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου. Β. Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
2. $\delta > R + \rho$	Γ. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. Δ. Οι κύκλοι τέμνονται.
3. $\delta = R - \rho$	Ε. Ο κύκλος (O, ρ) είναι εσωτερικός του (K, R) χωρίς να έχουν κοινά σημεία.

Ε. Ερωτήσεις ανάπτυξης

128. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και στις προεκτάσεις των πλευρών του BA και ΓA τα σημεία Δ και E , ώστε $AD=AE$. Να δείξετε ότι :
- $BE=\Gamma\Delta$
 - Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε $MD=ME$.
129. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και στις προεκτάσεις της $B\Gamma$ τα σημεία E και Z ώστε $BE=\Gamma Z$. Να δείξετε ότι :
- το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές
 - τα τρίγωνα ABZ και $AG\Gamma$ είναι ίσα.
130. Στις προεκτάσεις της βάσης $K\Lambda$ ισοσκελούς τριγώνου $MK\Lambda$ παίρνουμε σημεία Π και P ώστε $K\Pi=\Lambda P$. Να δείξετε ότι :
- Το τρίγωνο $M\Pi P$ είναι ισοσκελές
 - $\Pi\hat{M}\Lambda = K\hat{M}P$
 - Οι γωνίες $\Pi\hat{M}P, K\hat{M}\Lambda$ έχουν κοινή διχοτόμο.
131. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB και AG ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα ίσα τμήματα BD και ΓE αντίστοιχα. Να δείξετε ότι :
- $AD=AE$ και $BE=\Gamma\Delta$
 - $B\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{E}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}E = \Delta\hat{\Gamma}E$
 - Αν O σημείο τομής των BE και $\Gamma\Delta$ τότε τα τρίγωνα $O\Gamma E$ και OBD είναι ίσα.
132. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($\beta=\gamma$) τότε $\mu_\beta = \mu_\gamma$ και $\delta_\beta = \delta_\gamma$.
133. Προεκτείνουμε τις πλευρές AB, AG τριγώνου κατά τμήματα $BD=AB, \Gamma E=AG$ αντίστοιχως. Να δείξετε ότι τα Δ, E ισαπέχουν από την $B\Gamma$.
134. Αν το μέσο μιας πλευράς τριγώνου προβάλλεται στις άλλες δύο πλευρές του και ισαπέχει απ' αυτές, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
135. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) είναι $B\Gamma > AB$. Στην ημιευθεία $B\Gamma$ θεωρούμε ένα σημείο Δ , έτσι ώστε $BD=BA$ και στην ημιευθεία AB ένα σημείο E έτσι ώστε $BE=\Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.
136. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) θεωρούμε σημείο M στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $MB=MG$. Να δείξετε ότι η AM διχοτομεί την $\hat{A}$.
137. Θεωρούμε δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE με κοινή κορυφή το A και τέτοια ώστε να είναι $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$. Να δείξετε ότι $BD=\Gamma E$ ή $BE=\Gamma\Delta$.
138. Θεωρούμε δύο σημεία Δ και E της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, τέτοια

ώστε να είναι $BD=GE$. Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά ισαπέχουν από τις ίσες πλευρές του τριγώνου.

139. Να αποδειχθεί ότι το μέσο της υποτείνουσας ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχει από τις κάθετες πλευρές του.
140. Στις πλευρές AB , BC και CA ισοπλεύρου τριγώνου ABC θεωρούμε τα σημεία M , N και P αντίστοιχα τέτοια ώστε $AM=BN=CP$. Να δείξετε ότι και το τρίγωνο MNP είναι ισόπλευρο.
141. Αν σε ισοσκελές τρίγωνο ABC είναι $\alpha = \beta = \gamma$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
142. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους a . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής του τριγώνου ABC του οποίου η διάμεσος CM έχει σταθερό μήκος b .
143. Δύο ευθείες α και β τέμνονται στο σημείο O . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις ευθείες αυτές.
144. Δίνεται κύκλος (O, ρ) . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που έχουν ακτίνα ίση με ένα γνωστό ευθύγραμμο τμήμα a και εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο (O, ρ) .
145. Αν δύο τρίγωνα είναι συμμετρικά ως προς ένα σημείο K , να δείξετε ότι είναι ίσα.
146. Να δείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου ABC ως προς το φορέα μιας πλευράς του είναι τρίγωνο ίσο με το ABC .
147. Να κατασκευαστεί το συμμετρικό ενός τριγώνου ABC ως προς την διχοτόμο AD αυτού και να συγκριθεί με το ABC .
148. Να κατασκευαστεί το συμμετρικό μιας τεθλασμένης γραμμής με τρεις πλευρές ως προς το μέσο μιας πλευράς της.
149. Αν O είναι εσωτερικό σημείο τριγώνου ABC , να δείξετε ότι : $\angle BOA > \hat{A}$.
150. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ABC ($AB=AC$) με κορυφή το A και ένα σημείο Δ της ευθείας AC . Να συγκριθούν τα τμήματα ΔB , ΔC .
151. Σε κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η AB και η μικρότερη η CD . Να δειχθεί ότι $\hat{A} < \hat{C}$ και $\hat{B} < \hat{D}$.
152. Αν το M είναι εσωτερικό σημείο τριγώνου ABC τότε : $\tau < MA+MB+MC < 2\tau$.
153. Σε κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ ισχύει $BC=AD$ και $\hat{A} > \hat{B} > 90^\circ$. Να δείξετε ότι :

$$BD > AG \text{ και } GD > AB.$$

154. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με κορυφή το A και σημείο Δ της πλευράς AG . Προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα $AE=AD$. Να συγκριθούν τα τμήματα BD και GE .
155. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma$ και την διχοτόμο GA . Να δείξετε ότι $DA < DB$.
156. Αν M σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ και Δ, E οι προβολές του στις AB, AG αντιστοίχως. Να δείξετε ότι $DE < B\Gamma$.
157. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο I , να δείξετε ότι $IB < IG$.
158. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$:
- Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$ να δείξετε ότι $\hat{AMB} < \hat{AM\Gamma}$
 - Αν Δ είναι σημείο της διαμέσου AM να δείξετε ότι $DB < DG$.
159. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$, θεωρούμε το ύψος AD και την διάμεσο AM .
Αν είναι $AD = \frac{B\Gamma}{2}$ να δείξετε ότι :
- $AM > BM$ και $AM > M\Gamma$
 - $\hat{A} < \hat{B} + \hat{\Gamma}$
160. Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου AB με $(AB)=10$ και σημείο Γ αυτού τέτοιο ώστε $\widehat{AG} = 2\widehat{GB}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ και τα μήκη των πλευρών του.
161. Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα K και K' . Από το μέσο του KK' , ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους στα σημεία A, B και A', B' αντιστοίχως. Να δείξετε ότι $AB=A'B'$.
162. Θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές $AB, \Gamma\Delta$ κύκλου (O, R) με μήκη α, β αντιστοίχως. Να υπολογιστεί η απόστασή τους .
163. Μια εφαπτόμενη κύκλου (O, R) τέμνει τις εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα μιας διαμέτρου στα σημεία A και B . Να δείξετε ότι οι διακεντρικές ευθείες OA και OB είναι κάθετες.
164. Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο A εκτός αυτού. Από το A φέρνουμε ένα εφαπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα AB προς τον κύκλο .
- Να δείξετε ότι $AB < AO$

- Να βρεθεί σημείο M της ημιευθείας AB τέτοιο ώστε το τρίγωνο OMA να είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη $\hat{M}$.
165. Δύο κύκλοι με κέντρα K, Λ τέμνονται στα σημεία A και B . Θεωρούμε τέμνουσα $\Gamma\Delta$ αυτών παράλληλη της $K\Lambda$. Να δειχθεί ότι $\Gamma\Delta = 2 \cdot K\Lambda$.
166. Να εξεταστεί αν είναι δυνατόν η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων να είναι μεσοκάθετη της διακέντρου αυτών.
167. Αν δύο άνισοι κύκλοι τέμνονται να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους διέρχεται από το σημείο τομής των κοινών εφαπτόμενων των κύκλων.
168. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο A . Αν ευθεία ε εφάπτεται των κύκλων στα B και Γ τότε να δείξετε ότι $\angle B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$.
- (Υπόδειξη : Να φέρετε την κοινή εφαπτομένη στο A)
169. Να κατασκευαστεί κύκλος ο οποίος εφάπτεται των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$.
170. Να κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ όταν δίνονται η βάση $B\Gamma = \alpha$ και το ύψος $AD = u$.
171. Να κατασκευαστεί ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) για το οποίο ισχύει :
- Η διάμεσος $AM = \lambda$ και μια κάθετη πλευρά.
 - Η διάμεσος $AM = \lambda$ και το ύψος $AD = u$.
172. Να κατασκευαστεί κύκλος ο οποίος διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

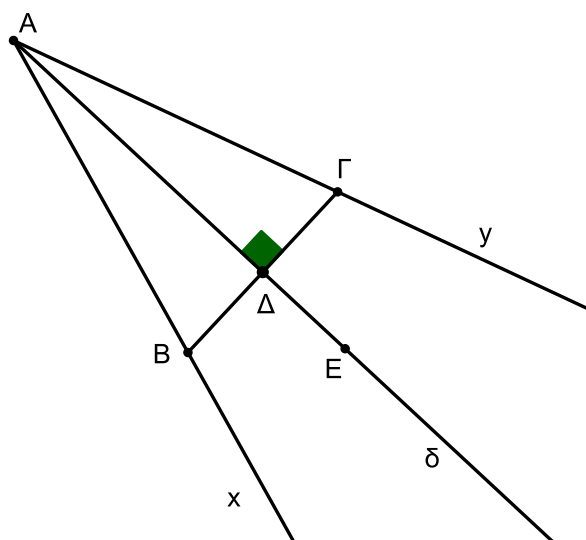
ΘΕΜΑ 2_36341

Δίνεται γωνία $\alpha\beta\gamma$ και η διχοτόμος της $\alpha\delta$. Από τυχαίο σημείο B της $\alpha\chi$ φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο $\alpha\delta$, η οποία τέμνει την $\alpha\delta$ στο σημείο Δ και την $\alpha\gamma$ στο σημείο Γ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν E τυχαίο σημείο της $\alpha\delta$, να αποδείξετε ότι το E ισαπέχει από τα B και Γ .

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2_36333

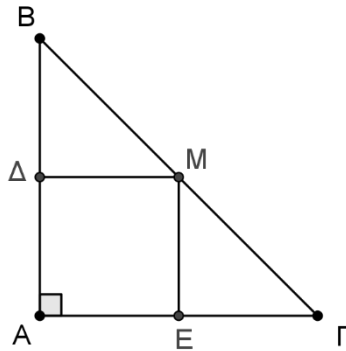
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι $M\Delta = ME$, τότε:

- i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα, (Μονάδες 8)
- ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Αν είναι $AB = AG$, τότε $MD = ME$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2_36170

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AE = A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$, (Μονάδες 6)

β) $BD = \Gamma E$, (Μονάδες 10)

γ) $\widehat{B\Gamma} = \widehat{E\Gamma B}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2_36104

Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA=OB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $MA=MB$, (Μονάδες 15)

β) Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMB}$. (Μονάδες 10)

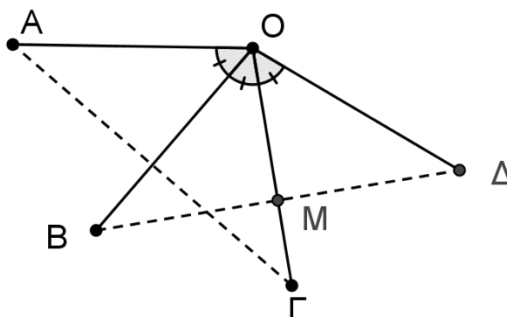
ΘΕΜΑ 2_36110

Αν στο σχήμα που ακολουθεί είναι $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta}$ και $OA=OB=O\Gamma=O\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $AG=BD$, (Μονάδες 10)

β) το M είναι μέσον της BΔ, όπου M το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2_36100

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA=KB$) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{K}$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε $AL=BM$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2_36099

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$) και στις ίσες πλευρές ΑΒ,ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD=\frac{1}{3}AB$ και $AE=\frac{1}{3}AG$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, (Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα, (Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

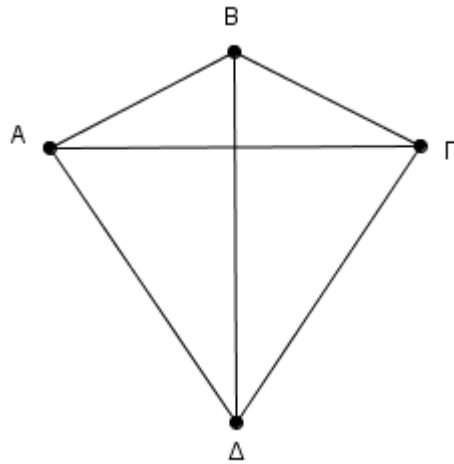
ΘΕΜΑ 2_36102

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA=BG$ και $DA=DG$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

α) η BD είναι διχοτόμος των γωνιών B και D του τετραπλεύρου $ABGD$, (Μονάδες 12)

β) η BD είναι μεσοκάθετος του τμήματος AG . (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2_34784

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα (Μονάδες 12)

β) η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $B\hat{M}\Gamma$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2_34780

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα

$AD = AB$ και $AE = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $DE = B\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την ED στο Z , να αποδείξετε ότι:

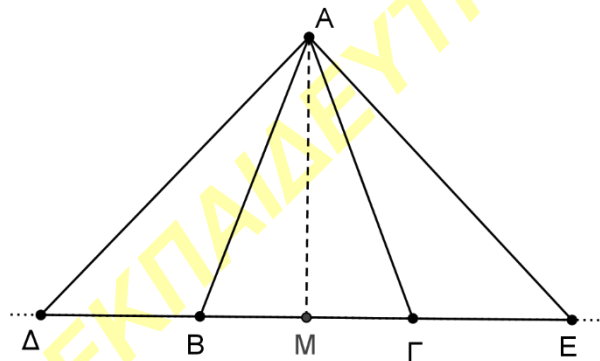
- i. τα τρίγωνα $\triangle AZ$ και $\triangle BM$ είναι ίσα, (Μονάδες 7)
- ii. $Z\Delta = \frac{\Delta E}{2}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2_34774

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{B\Delta A} = \widehat{\Gamma E A}$, (Μονάδες 6)
- β) τα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma E$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)
- γ) η AM είναι και διάμεσος του τριγώνου $\triangle A\Delta E$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2_34493

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $\triangle A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

- α) Αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\widehat{A} = \widehat{A'}$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
- β) Αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\widehat{B} = \widehat{B'}$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2_34773

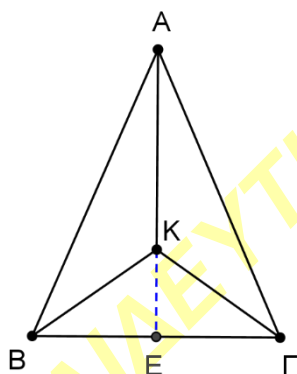
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

iii. τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

iv. η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$. (Μονάδες 6)

β) Αν η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E , τότε να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$. (Μονάδες 7)

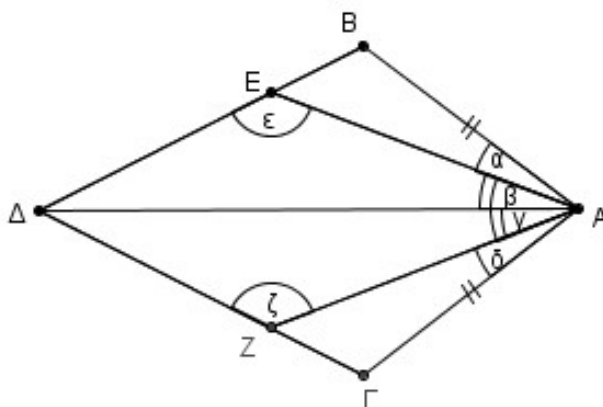


ΘΕΜΑ 2_34511

Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\hat{\epsilon}$ και $\hat{\zeta}$ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2_13518

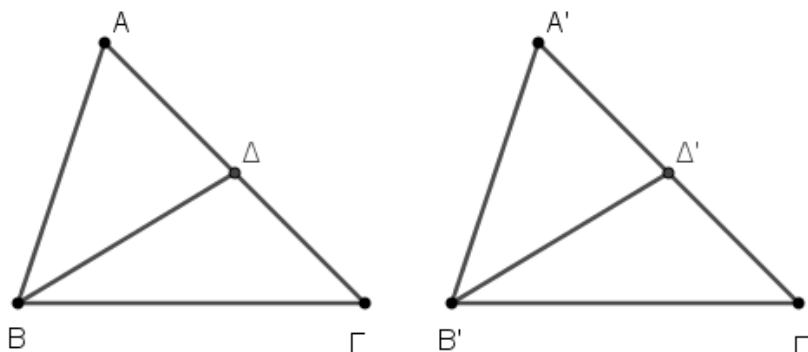
Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A} = \hat{A}'$

(Μονάδες 15)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2_12705

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma = 2AB$. Η διχοτόμος του $A\Delta$ τέμνει την διάμεσο BE στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$.

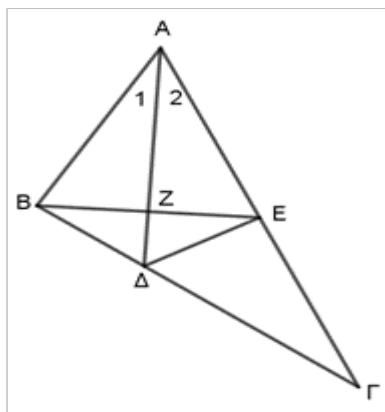
(Μονάδες 7)

β) $\Delta B = \Delta E$.

(Μονάδες 8)

γ) $AZ \perp BE$

(Μονάδες 10)



Θέμα 2_12636

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα BD , ΓE αντίστοιχα ώστε

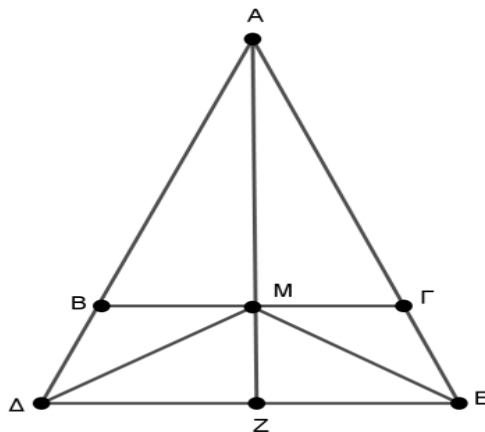
$$BD = GE.$$

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα MBD και MGE είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία MDE είναι ίση με τη γωνία $MEΔ$. (Μονάδες 6)

γ) Αν η AM τέμνει την DE στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην DE .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4_37124

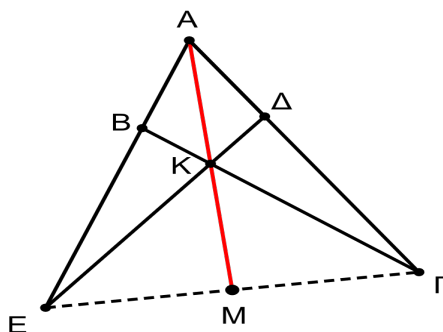
Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ με $AB < AΓ$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = AΓ$. Στην πλευρά $AΓ$ θεωρούμε σημείο $Δ$ έτσι ώστε $AD = AB$. Αν τα τμήματα DE και $BΓ$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $EΓ$ στο M , τότε να αποδείξετε ότι:

α) $BΓ = DE$ (Μονάδες 6)

β) $BK = KΔ$ (Μονάδες 7)

γ) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A . (Μονάδες 6)

δ) Η AM είναι μεσοκάθετος της $EΓ$. (Μονάδες 6)

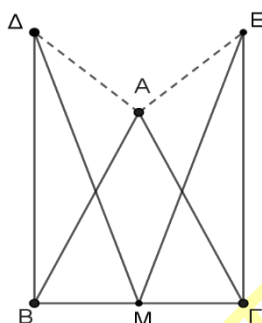


ΘΕΜΑ 2_37102

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) $AD=AE$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2_36226

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

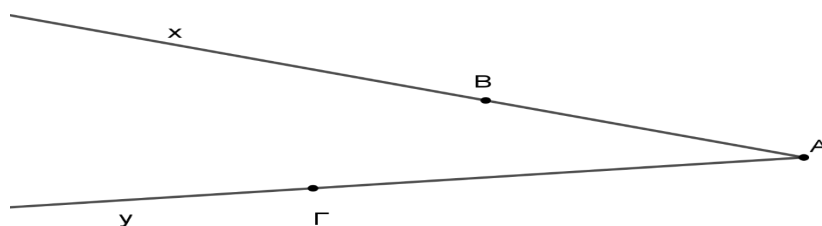
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)

β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)

γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

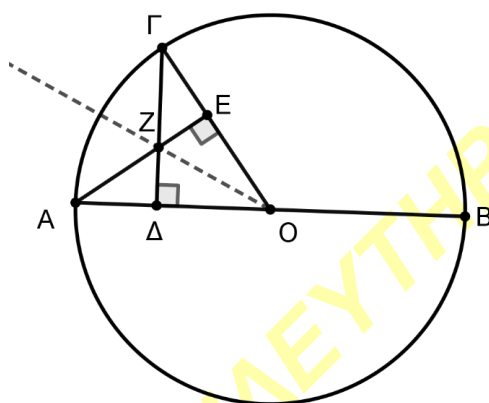


ΘΕΜΑ 2_36345

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν τα AE , $\Gamma\Delta$ είναι κάθετα τμήματα στις OG , OA αντίστοιχα και Z το σημείο τομής τους, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές, (Μονάδες 13)

β) η OZ διχοτομεί τη γωνία $\angle AOG$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου AG . (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2_34503

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα, (Μονάδες 13)

β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2_36332

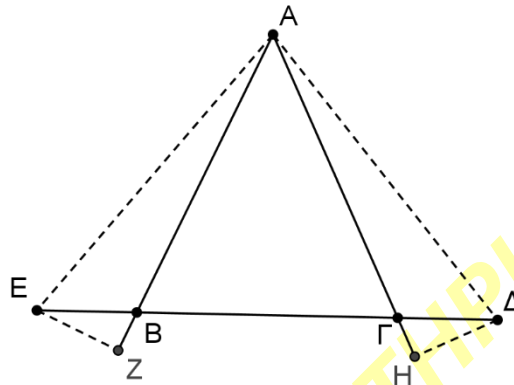
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι

ώστε $\Gamma\Delta = \text{BE}$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $\text{A}\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{AD} = \text{AE}$ (Μονάδες 12)

β) $\text{EZ} = \Delta\text{H}$ (Μονάδες 13)



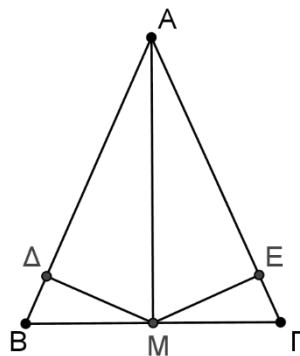
ΘΕΜΑ 2_36330

Δίνεται τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $\text{B}\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $\text{M}\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $\text{A}\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι $\text{M}\Delta = \text{M}\text{E}$, τότε τα τρίγωνα $\text{AM}\Delta$ και AME είναι ίσα. (Μονάδες 13)

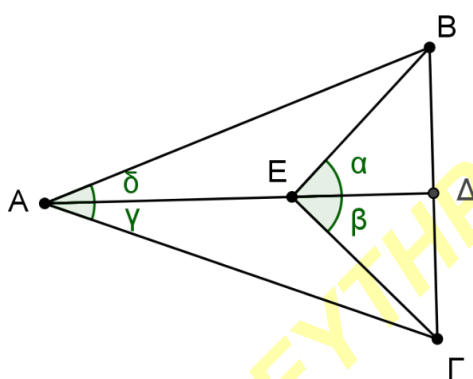
β) Αν είναι $\text{AB} = \text{A}\Gamma$ και M μέσο του $\text{B}\Gamma$, τότε $\text{M}\Delta = \text{M}\text{E}$. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2_34516

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

- α) Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο $ΓΕΒ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) Η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 9)

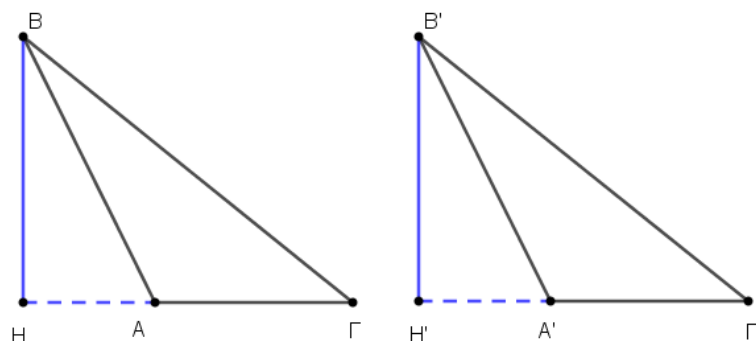


ΘΕΜΑ 2_12149

Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} > 90^\circ$) και $A'B'\Gamma'$ ($\hat{A}' > 90^\circ$) με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

- α) $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$. (Μονάδες 13)

- β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2_34499

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και BD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το Δ φέρουμε ευθεία κάθετη στη $B\Gamma$ που την τέμνει σε σημείο E και έστω Z το σημείο στο οποίο η ED τέμνει την προέκταση της πλευράς BA προς το A .

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB=BE$, (Μονάδες 13)

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2_34497

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα MD .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma D$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) τα σημεία A και D ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$. (Μονάδες 13)

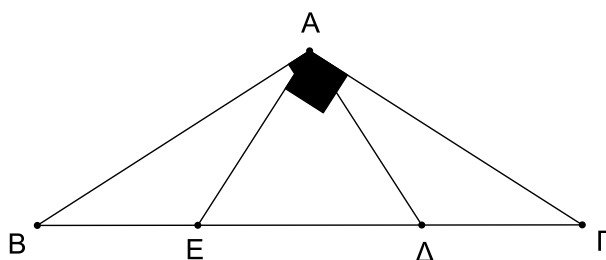
ΘΕΜΑ 2_13533

Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην AG στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) το τρίγωνο $A\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) $BE = \Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2_34401

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και τα ύψη του BD και $\Gamma\epsilon$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα, (Μονάδες 15)

β) $AD=AE$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2_34387

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE των γωνιών B και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Έστω EH και ΔZ οι κάθετες από τα σημεία E και Δ αντίστοιχα στη $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $EH=\Delta Z$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4_37125

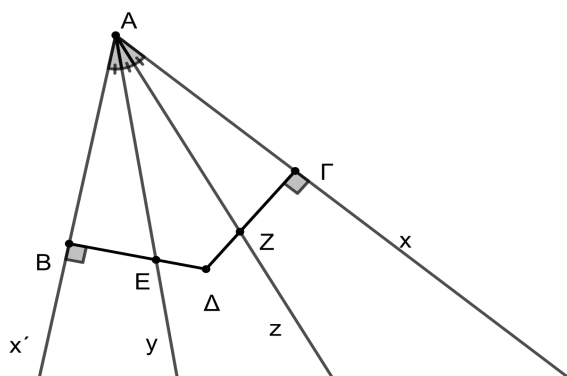
Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'\hat{A}x$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ .

Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$. (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4_1707

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) του παρακάτω σχήματος, η κάθετη στο μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AD στο σημείο E . Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις $AB, A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

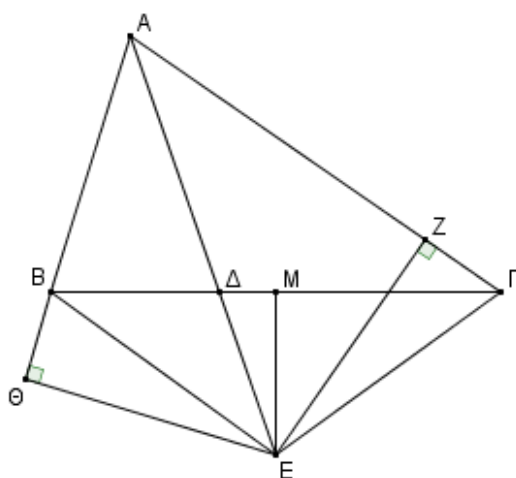
(Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘBE και $Z\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) $\angle \Gamma E + \angle \Lambda BE = 180^\circ$

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2_36331

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι $M\Delta = ME$, τότε:

i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα,

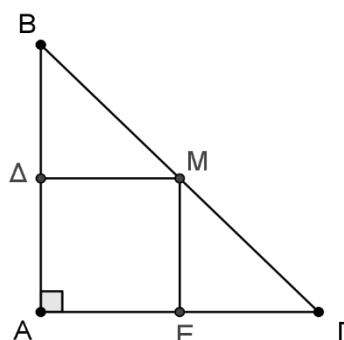
(Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

β) Αν είναι $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2_36168

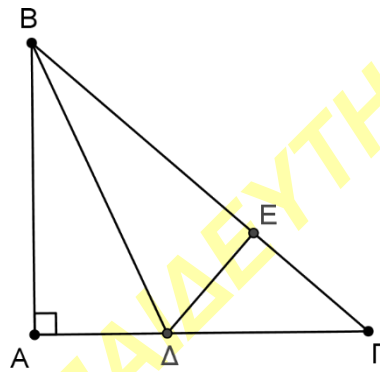
Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{A}$ και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι μικρότερη της γωνίας $\hat{B}$. Η BD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και η DE είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AD=DE$, (Μονάδες 8)

β) $AD < DG$, (Μονάδες 9)

γ) $AG > AB$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2_34514

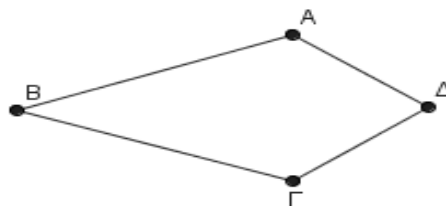
Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B\hat{A}\Gamma} = \hat{B\hat{\Gamma}A}$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 10)

γ) η ευθεία BD είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)

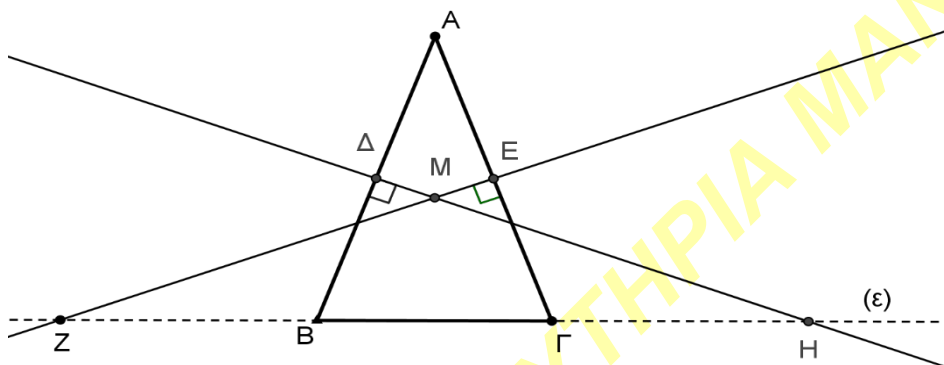


ΘΕΜΑ 2_34507

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και τα μέσα Δ , E των πλευρών του AB , AG αντίστοιχα. Έστω ότι οι μεσοκάθετες ευθείες των πλευρών AB και AG τέμνονται στο M και οι οποίες τέμνουν τον φορέα (ε) της βάσης $B\Gamma$ στα σημεία H και Z .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $EZ\Gamma$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



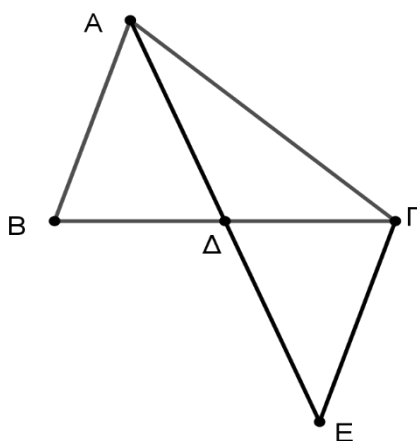
ΘΕΜΑ 2_34502

Στο ακόλουθο σχήμα, η AD είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της AD , ώστε $DE=AD$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = GE$, (Μονάδες 12)

β) $AE < AB + AG$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2_34496

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$, τότε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma=AB$.

(Μονάδες 13)

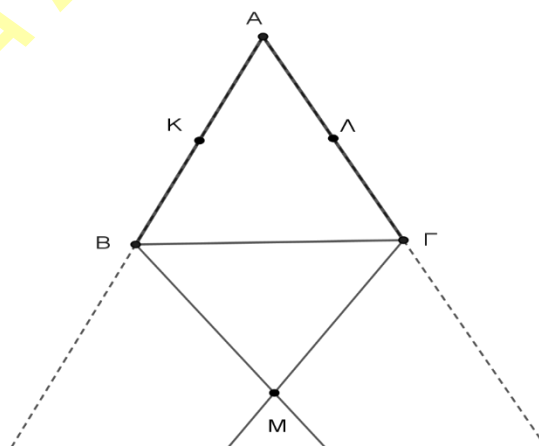
ΘΕΜΑ 2_34415

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο M και τα σημεία K και Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB=M\Gamma$, (Μονάδες 12)

β) $MK=M\Lambda$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2_34396

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB σε

σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ μια κάθετη ευθεία, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ σε σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AD=DE$, (Μονάδες 13)

β) $AD < DB$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4_37094

Έστω $ABΓ$ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $ΓΔ$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $ΑΓ$ και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές με $AB=ΑΓ$, τότε τα ύψη BE και $ΓΔ$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την **αντίστροφη** πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

(Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την **αντίστροφή** της ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4_37095

Δίνεται οξεία γωνία $\widehat{xOy}$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και στην Oy στα Λ, B αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

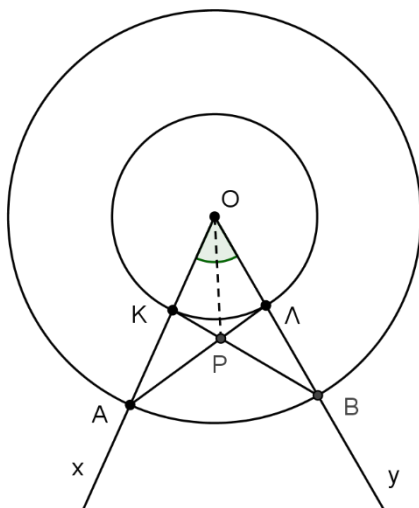
α) $ΑΛ=BK$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των $ΑΛ$ και BK ,

(Μονάδες 8)

γ) η OP διχοτομεί την $\widehat{xOy}$.

(Μονάδες 9)



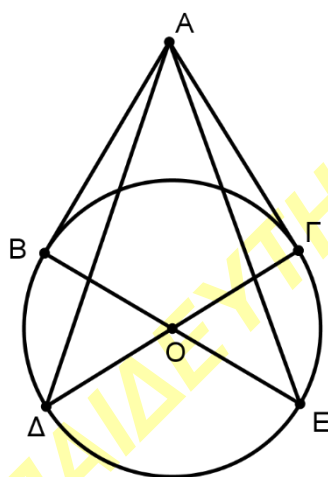
ΘΕΜΑ 2_36354

Έστω κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο A . Από το A φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG του κύκλου και έστω E και Δ τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα, (Μονάδες 13)

β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα. (Μονάδες 12)

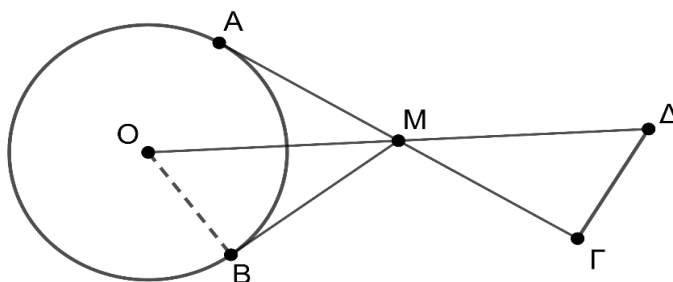


ΘΕΜΑ 2_36098

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = OM$.

α) Να αποδείξετε ότι $MB = M\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



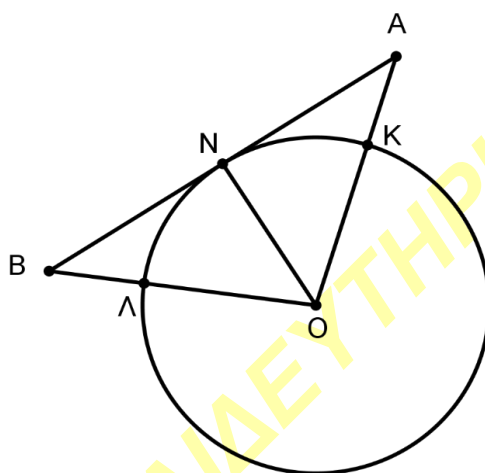
ΘΕΜΑ 2_36344

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA=NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές, (Μονάδες 13)

β) το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$. (Μονάδες 12)

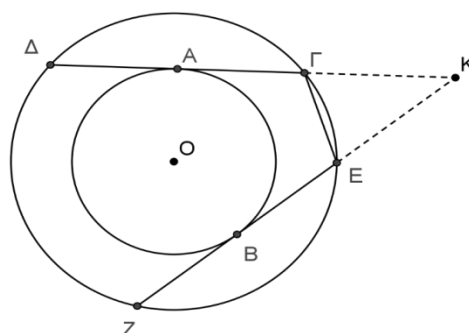


ΘΕΜΑ 2_36338

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$. (Μονάδες 12)

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτείνόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

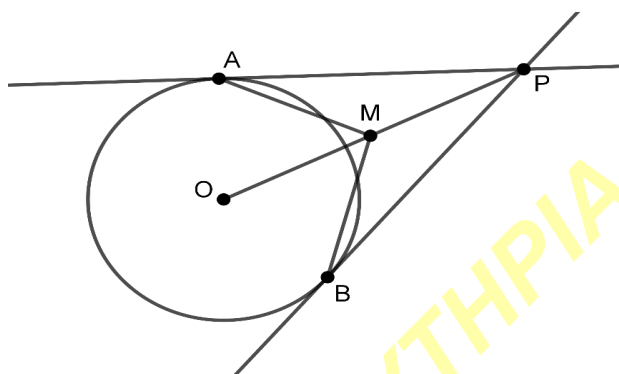


ΘΕΜΑ 2_36095

Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

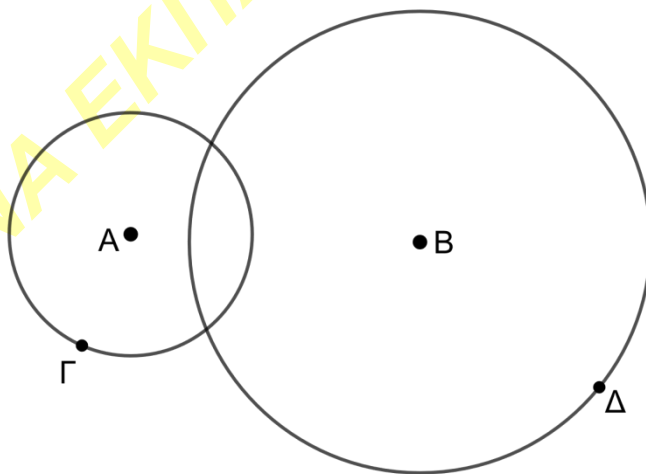
α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2_13836

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.



Να αποδείξετε ότι $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$. (Μονάδες 10)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα

σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 5 από το Β του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2_13835

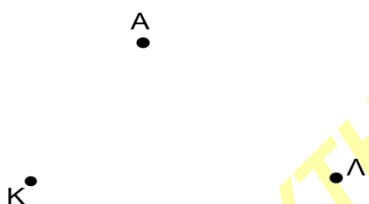
Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < ΚΛ < 9$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2_13817

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Β του κύκλου φέρουμε

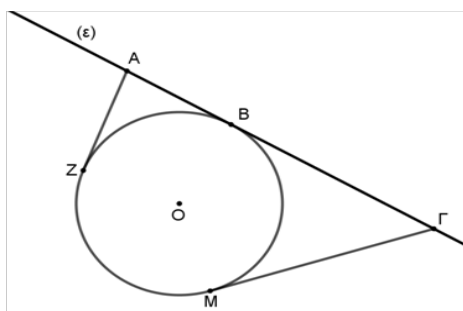
εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία Α και Γ εκατέρωθεν του Β έτσι ώστε $BA < BG$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΓΜ στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $AG = AZ + MG$.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2_13759

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε) . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

α) $d = 3$. (Μονάδες 9)

β) $d = 6$. (Μονάδες 8)

γ) $d = 9$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2_13758

Δίνονται δύο κύκλοι $(K,3)$ και $(\Lambda,8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) $K\Lambda = 13$. (Μονάδες 5)

β) $K\Lambda = 2$. (Μονάδες 5)

γ) $K\Lambda = 5$. (Μονάδες 5)

δ) $K\Lambda = 11$. (Μονάδες 5)

ε) $K\Lambda = 9$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2_13757

Δίνονται δύο κύκλοι $(K,2)$ και $(\Lambda,5)$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται

εσωτερικά.

(Μονάδες 6)

γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν ο κύκλος $(K,2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda,5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι

τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 _ 1752

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

β) $\Gamma A = \Delta B$.

(Μονάδες 8)

γ) η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 _ 1751

Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $P\Gamma E$ στα σημεία A, Δ και B .

α) Να αποδείξετε ότι:

I. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$

(Μονάδες 6)

II. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$

(Μονάδες 8)

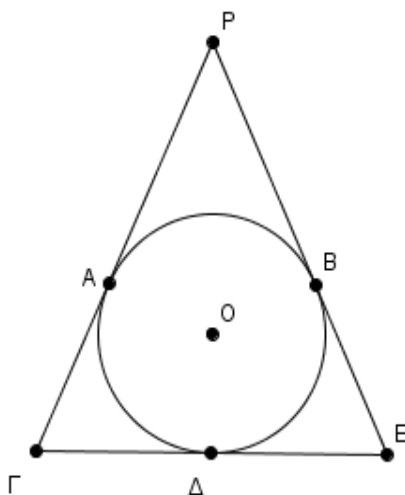
β) Αν $AG = BE$, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο $P\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

II. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4 _ 1875

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ε στο K και την ευθεία AG στο Z . Η κάθετη στην πλευρά AG στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ=AE$

(Μονάδες 8)

ii. $AK=A\Lambda$

(Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KZ και $E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

